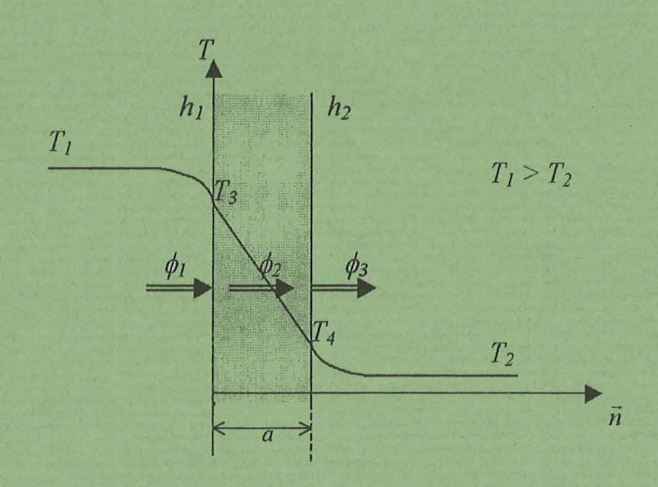
TEORÍA ANALÍTICA DE LA CONDUCCIÓN DEL CALOR DE FOURIER

por

MERCEDES GONZÁLEZ REDONDO

Mª DOLORES REDONDO ALVARADO



CUADERNOS

DEL INSTITUTO

JUAN DE HERRERA

DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

3-12-06

TEORÍA ANALÍTICA DE LA CONDUCCIÓN DEL CALOR DE FOURIER

por

MERCEDES GONZÁLEZ REDONDO
Mª DOLORES REDONDO ALVARADO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-12-06

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

3 Área
12 Autor
06 Ordinal de cuaderno (del autor)

Teoría analítica de la conducción del calor de Fourier (2ª edición)

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Laura Bejerano Iglesias
CUADERNO 141.02 / 3-12-06
ISBN: 84-9728-102-0
Depósito Legal: M-20773-2004

ÍNDICE

1. CONSIDERACIONES PRELIMINARES

1.1. Objeto

El objeto de este cuaderno de apoyo a la docencia consiste en el estudio del *campo térmico en los medios materiales sólidos*; es decir, de la función temperatura *T(P,t)*, dependiente de punto y del tiempo. Consecuencia de esa temperatura distribuida en el cuerpo [la función o campo escalar *T(P,t)*], con diferentes valores en general en los distintos puntos del medio, es el *flujo de calor*, interior al sólido y que se intercambia con los alrededores a través de los contornos del sólido.

Este tema es de importancia capital en arquitectura y en construcciones de ingeniería. Se pretende ofrecer los *fundamentos físicos de las técnicas de aislamiento térmico.*

El *flujo calorífico* en el interior de un sólido, transporte de energía calorífica, es consecuencia de un gradiente de temperaturas (de un desequilibrio térmico) y, por tanto, no puede estudiarse a la luz de los principios de la Termodinámica Clásica, disciplina aplicable a los sistemas en estados de equilibrio.

Con estas ideas tan escuetamente expuestas puede insinuarse, en este primer parágrafo de las consideraciones preliminares, que la *teoría de la conducción del calor en sólidos* se inserta en el ámbito de las *teorías fenomenológicas de transporte.*

1.2. Contexto de los modos de transmisión del calor

A) Tipología

La *teoría analítica de la conducción del calor*, teoría de la conducción del calor en sólidos, es sólo uno de los modos, uno de los mecanismos, uno de los procesos, una de las formas de transmisión del calor. Es conveniente situar hoy esta teoría en el contexto más amplio de los diferentes modos, procesos, etc., de transmisión de calor. Estos modos, en visión y lenguaje actualizados, y en síntesis introductoria, son los siguientes:

Conducción. Consiste en un transporte de energía calorífica sin transporte de materia, pero en presencia de ésta; es decir, tiene lugar en los cuerpos, exige la presencia de materia. Este proceso es típico de los sólidos y se considera consecuencia de la agitación térmica: 1) de los *fonones* (cuantos de energía de las ondas elásticas o de vibración de las redes interatómicas; caso de los sólidos no metálicos); 2) de los *electrones libres* (sólidos metálicos); o 3) de las *moléculas* (en los fluidos). En este último caso -de los fluidos- es imposible separar el proceso de conducción del proceso de convección, propio de los fluidos.

Convección. Consiste en un transporte de energía calorífica con transporte de materia. (Por tanto, precisa también la presencia de materia). Este proceso es típico de los fluidos

y se considera consecuencia de una diferencia de temperatura que origina diferencias de densidad de unos puntos a otros -ya que la densidad es función de la temperatura, $\rho(T)$- que en presencia de un campo gravitatorio origina las "corrientes de convección".

Radiación. Consiste en un transporte de energía calorífica que puede tener lugar tanto en presencia de materia como en ausencia de ésta (en el vacío). No exige, por tanto, la presencia de materia. Este proceso tiene carácter de onda electromagnética "térmica"; es decir, cualitativamente es una onda electromagnética de un determinado rango de frecuencias. La emisión tiene lugar en todas direcciones y al incidir en un cuerpo éste puede actuar reflejándola, absorbiéndola (con aumento de la energía interna, incremento de la temperatura) o transmitiéndola.

Con independencia de los adjetivos que, usualmente, en cada caso se utilizan, sugerimos la conveniencia de que para los tres tipos de modos de transmisión del calor se utilice el mismo adjetivo; es decir, por ejemplo, conducción térmica, convección térmica y radiación térmica, o bien, conducción calorífica, convección calorífica y radiación calorífica.

B) Regímenes de transmisión del calor

Cualquiera de los tres tipos de procesos anteriores, atendiendo a la variable tiempo, puede tener lugar, básicamente, en los siguientes tipos de régimen:

a) Régimen permanente o estacionario. La temperatura es una función exclusiva de punto; por tanto, independiente del tiempo, $T(x,y,z)$. El flujo térmico (o calorífico) es constante en el tiempo.

b) Régimen variable o transitorio. La temperatura y el flujo de calor dependen del tiempo. En general, $T(x,y,z,t)$.

En este capítulo se estudia directamente la *conducción del calor.* Los demás modos de transmisión del calor actúan como condiciones de contorno o complementos.

1.3. Noticias historicas

El origen de la teoría de la conducción del calor se encuentra en la obra de J. Fourier "*Théorie Analytique de la chaleur*" (1822; aunque había sido presentada en 1807/1808 a la Academia de Ciencias de París).

Con esta obra se inicia no sólo la conducción del calor sino que, en realidad, se establece con ella el nacimiento de las *teorías físicas del transporte*, en cuyo marco la conducción del calor puede considerarse como un caso particular y la primera. El modelo formal de esta teoría se adopta por, y se adapta para, otras teorías físicas tales como la conducción eléctrica en medio continuo de Ohm, la hidráulica del medio

permeable de Darcy, la difusión de Fick, etc. Estas teorías responden al mismo modelo filosófico-matemático que la conducción del calor de Fourier, a quien puede, por tanto, considerarse como pionero de todas ellas.

A pesar de la antigüedad de esta teoría (Fourier, 1807) el tratamiento de Fourier continúa siendo de plena actualidad; es aplicable -y se aplica, prácticamente con exclusividad- a los problemas y proyectos, de naturaleza térmica, de arquitectura e ingeniería.

1.4. Características fundamentales

Es interesante destacar, aunque sólo sea sinópticamente, algunas de las características básicas de esta teoría. Entre ellas se reiteran explícitamente algunas de las expuestas anteriormente.

a) *Es una teoría termológica.* Trata fundamentalmente de las ideas de temperatura y de calor, ideas que conceptualiza con suficiente precisión.

b) *Precisa de la existencia de un referencial espacio-temporal.* Para ello ha elegido la noción de espacio clásico, el newtoniano-kantiano, el espacio geométrico ordinario (euclídeo tridimensional), y la noción clásica de tiempo, el tiempo newtoniano-kantiano. En este referencial espacio-temporal se definirán las funciones necesarias para la teoría. (Conviene destacar aquí su radical diferencia conceptual con la Termodinámica Clásica).

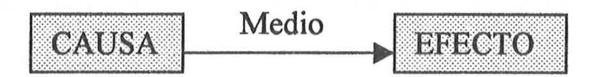
c) *Es una teoría determinista.* Dada una causa actuando en un cierto cuerpo, se produce necesariamente un efecto determinado, siempre, y siempre de la misma cuantía.

d) *Es una teoría del continuo.* El cuerpo sólido (o el fluido en su caso) objeto de estudio de esta teoría se supone *medio continuo*; es decir, todas sus propiedades se expresan mediante funciones (o campos) continuas (en general, mediante funciones de la clase $C^{(2)}$, diferenciables de 2° orden).

2. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1. Esquema filosófico-matemático

Las teorías físicas del transporte de tipo Fourier, entre las que se integra la conducción del calor, responden al modelo formal filosófico-matemático que se esquematiza a continuación.



Existe una **CAUSA**, que produce necesariamente un **EFECTO** cuya cuantía depende de una propiedad del **MEDIO**. En consecuencia, causa, medio y efecto constituyen los ingredientes básicos de esta teoría.

En el caso de la teoría analítica de la conducción del calor la CAUSA es el *campo térmico* (la distribución de temperaturas en el cuerpo), que produce como EFECTO necesario un *flujo térmico* (flujo calorífico o flujo de calor) desde las zonas de temperaturas más altas hacia las de temperaturas más bajas, de tal modo que la cuantía de este efecto no depende sólo de la diferencia de temperaturas (gradiente térmico) sino también de la naturaleza del MEDIO material, la *conductividad térmica.*

2.2. La causa: el campo térmico

La causa del flujo térmico es la existencia de un campo térmico, $T(P,t)$, en el seno del sólido -recinto del campo térmico-. La existencia de este campo escalar diferenciable supone o implica, simultáneamente con él, la existencia de un campo vectorial de gradientes de dicho campo escalar, $\vec{grad}\, T$, que puede considerarse como la causa inmediata del fenómeno o proceso de transporte del calor (energía calorífica) por conducción.

$T(P,t)$, y $\vec{grad}\, T$ campos escalar y vectorial respectivamente, coexisten simultáneamente con existencia (matemática) común sin preeminencia temporal ni esencial, se autoimplican matemáticamente. La teoría física los asume así, están correlacionados.

Desde el punto de vista de la teoría general de las magnitudes físicas, el concepto básico, caracterizador del campo térmico, es el de *temperatura*, que tiene la naturaleza de magnitud primaria; es decir, que debe caracterizarse tanto como sea posible, ya que no puede introducirse, en esta teoría de la conducción del calor, mediante una fórmula de definición en función de otras magnitudes.

El concepto "fourieriano" de temperatura utilizado en la Teoría Analítica de la Conducción del Calor se caracteriza por las siguientes notas distintivas fundamentales o propiedades:

a) Es una *magnitud (física) primaria.* Es, por tanto, un concepto primario o indefinido o básico que debe caracterizarse (no definirse mediante una fórmula matemática) "tanto como se pueda".

b) Algebraicamente es una variable escalar real.

c) Analíticamente es una función escalar real espacio-temporal (campo escalar real) definida sobre el "cuerpo" -concepto prefísico- objeto de estudio.

d) Se aplica a una supuesta propiedad, con existencia real, "distribuida" por/en el "cuerpo" (no de valor único para todo el "cuerpo" o "sistema") en cada instante; es decir, $T = T(P,t)$.

e) No es un concepto "macroscópico" (termodinámico) ni "microscópico" (mecánico, teoría cinética de la materia), es, en todo caso, un concepto "infinitesimal termológico". [La idealización de la teoría lo concibe como campo escalar en el recinto del "cuerpo" -considerado como parte del espacio clásico continuo- frente a las nociones de "cuerpo", de "sistema termodinámico" caracterizado macroscópicamente y de "sistema mecánico de gran número de partículas"].

f) En el desarrollo de la teoría de la conducción tiene el papel de función potencial escalar (determinada a menos de una constante aditiva) cuyo gradiente, $\vec{grad}\, T$, es la causa generadora del flujo térmico (o de calor).

La gran diferencia del "concepto fourieriano" de temperatura en contraste con el "concepto termodinámico clásico" es que la temperatura, en esta teoría de Fourier, es una función distribuida espacialmente en el "cuerpo" -$T(P,t)$- frente a ser propiedad global -macroscópica- del "sistema" representativa, entre otras, del "estado de equilibrio".

2.3. El efecto: el flujo térmico

El efecto es un flujo de calor, cuya cuantía depende de la causa -gradiente térmico- y de la conductividad térmica del medio.

En esta teoría -teoría "analítica", matemática- poco importa cuál sea el referente natural mejor o peor conocido e incluso cuál sea la "idea" "física" de calor. En el origen -noción de Fourier- imperaba mayoritariamente la "idea" de calórico (especie de fluido material). Posteriormente, se impuso la "idea" de *forma de energía* (energía calorífica), actualmente vigente; para ambas -tan radicalmente distintas en el pensamiento físico- es válida la representación matemática fourieriana del calor.

Aceptando la noción de calor -fuere la que fuere, aunque hoy deba ser la de energía calorífica- simbolizada por Q, ésta sería magnitud primaria en esta teoría física.

a) Magnitud primaria
b) Algebraicamente escalar
c) De proceso, de transporte en un espacio geométrico-físico (cuerpo)

d) De ella, Q, se deducen:

- Flujo de calor $\phi = \frac{Q}{t}$, cantidad de calor por unidad de tiempo.
- Densidad vectorial de flujo de calor, $\vec{q}$, que puede definirse:

· vectorialmente: $\phi = \vec{q} \cdot \vec{S} = \iint_S \vec{q} \cdot d\vec{S}$

· escalarmente: $q = \frac{Q}{t \cdot S}$

De las tres magnitudes, Q, ϕ, $\vec{q}$, una de ellas debe considerarse primaria (normalmente Q) y las otras dos, en consecuencia, son secundarias y se introducen mediante las fórmulas de definición anteriores.

2.4. El medio: la conductividad termica

La causa, gradiente vectorial de T, actúa en un medio material; éste posee una propiedad característica, la conductividad térmica, con la que interviene en el proceso de conducción térmica. Esta propiedad determina, junto con el gradiente, la cuantía del flujo térmico.

Una atención especial debe dedicarse a la conductividad térmica, propiedad característica del medio -"constante física dimensionada característica"- que es fundamental en el proceso. Depende de numerosas condiciones y variables tales como la propia temperatura, la presión, la presencia de impurezas, los posibles cambios de fase, la orientación del sólido respecto de unas condiciones térmicas exteriores, etc., pero matemáticamente (en la hipótesis de medio continuo) pueden condensarse todas estas variables en forma compacta, de tal manera que la función que la representa es una función tensorial de segundo orden real simétrica, de punto, del tiempo y de la orientación; es decir, $K(P,t,\vec{n})$.

Esta función (o campo) tensorial distribuida en el cuerpo, en un sistema arbitrario de coordenadas cartesianas $(0,x,y,z)$, puede expresarse mediante una *matriz simétrica* de orden tres y de funciones reales, $K \in M_{3x3}(R)$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}(x,y,z,t) & k_{12}(x,y,z,t) & k_{13}(x,y,z,t) \\ k_{12}(x,y,z,t) & k_{22}(x,y,z,t) & k_{23}(x,y,z,t) \\ k_{13}(x,y,z,t) & k_{23}(x,y,z,t) & k_{33}(x,y,z,t) \end{bmatrix} \qquad (1)$$

que si el medio es *homogéneo* (identidad en todos los puntos) no depende del punto; es decir,

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) & k_{13}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) & k_{23}(t) \\ k_{13}(t) & k_{23}(t) & k_{33}(t) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

y si es *estable* en el tiempo (*permanente*), no depende de éste; es decir:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}(x,y,z) & k_{12}(x,y,z) & k_{13}(x,y,z) \\ k_{12}(x,y,z) & k_{22}(x,y,z) & k_{23}(x,y,z,) \\ k_{13}(x,y,z) & k_{23}(x,y,z) & k_{33}(x,y,z) \end{bmatrix} \quad (3)$$

y si es, simultáneamente, *homogéneo* y *estable* se reduce a

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dada la naturaleza algebraica de matriz simétrica, existe un determinado *sistema de referencia,* denominado *principal respecto de la conductividad,* en el cual K se expresa mediante la matriz diagonal

$$K = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde k_x, k_y, k_z son las *conductividades térmicas principales del medio.*

Si el medio fuera *isótropo* -independencia de la dirección de transporte del flujo térmico; identidad de la conductividad en todas direcciones- los términos no diagonales de la matriz serían nulos y los diagonales iguales entre sí; es decir, K se reduciría a una *matriz escalar*:

$$K = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (6)$$

y, en este caso, el tensor K actúa "*como si fuera un escalar*".

Este largo desarrollo matricial puede expresarse de manera compacta, en el caso general, como $K(P,t,\vec{n})$, es decir, campo tensorial real de segundo orden simétrico, y corresponde a medios no homogéneos, inestables o transitorios y anisótropos. Además, pueden presentarse unos *casos especiales* de suma importancia en la práctica:

1. Homogeneidad (independencia de P): $K(\cancel{P},t,\vec{n})$
2. Estabilidad en el tiempo (independencia de t): $K(P,\cancel{t},\vec{n})$
3. Isotropía (independencia en la dirección, de $\vec{n}$): $K(P,t,\cancel{\vec{n}})$

En el caso de que se verifiquen los tres la conductividad "actúa" como si fuera un "escalar".

3. LEY FUNDAMENTAL DE FOURIER

3.1. Consideraciones introductorias

La teoría analítica del calor de Fourier tiene una sola *ley fundamental* o hipótesis legaliforme que relaciona sus magnitudes básicas (primarias -temperatura y calor- y constantes características -conductividad térmica-); es la denominada *Ley de Fourier.*

Suele decirse, con demasiada frecuencia, que es una ley *experimental o fenomenológica*, deducida del comportamiento de los cuerpos. Más bien puede afirmarse que es un *modelo teórico*, conscientemente "irreal" en su origen (cuando aún no se vislumbraba con un mínimo de nitidez la noción física de calor). Constituye un *instrumento formal* muy importante, dado que los resultados que de ella se deducen concuerdan aceptablemente con la experiencia.

A continuación se desarrolla el tema con una orientación pedagógica, constructiva. (Podría, no obstante, expresarse directamente de modo axiomático).

3.2. Expresión elemental, unidireccional

Sea un sólido continuo y homogéneo cualquiera en el que se considera una lámina de superficie S_x normal a la dirección x y espesor dx (Fig.1).

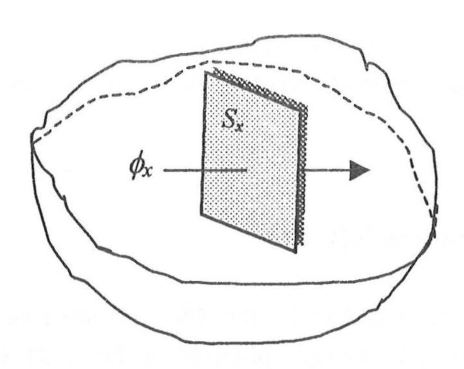


Fig.1

Llamando ϕ_x al *flujo de calor* que atraviesa la superficie normal a x, o lo que es lo mismo, la cantidad de calor que atraviesa S_x por unidad de tiempo, la ecuación de Fourier se expresa por:

$$\phi_x = \frac{dQ}{dt} = -k \cdot S_x \frac{dT}{dx} \tag{7}$$

donde:

$\phi_x = \left(\frac{dQ}{dt} \right)_x$, es la cantidad de calor que atraviesa S_x en la dirección x en el intervalo de tiempo dt.

k, es la conductividad según la dirección x, propiedad característica del medio. Su inverso, $1/k$, recibe el nombre de *resistividad térmica.*

T, es el campo térmico.

$\frac{dT}{dx}$, es el gradiente térmico en la dirección x.

El signo - significa que el flujo térmico tiene lugar en el sentido del campo térmico decreciente.

La aceptación de esta ley permite *construir* la teoría de la conducción del calor.

Desde el punto de vista del Análisis Dimensional clásico puede introducirse la ley de acuerdo con las siguientes relaciones de proporcionalidad:

$$(\phi) \propto (S)(dT)(dx)^{-1} \tag{8}$$

o bien

$$(Q) \propto (t)(S)(dT)(dx)^{-1} \tag{9}$$

De estas relaciones de proporcionalidad se pasa a la ecuación entre medidas mediante la introducción de la *constante característica,* k, del cuerpo en cuestión, (2.4).

3.3. Expresión general en medios isótropos

En la hipótesis de que la conductividad térmica sea isotrópica (idéntica en todas las direcciones) la ecuación (7) puede aplicarse a las tres direcciones mutuamente ortogonales de un sistema cartesiano ortonormal *(0;x,y,z)* de la forma siguiente:

$$\phi_x = -k\, S_x \frac{\partial T}{\partial x} \tag{10,a}$$

$$\phi_y = -k\, S_y \frac{\partial T}{\partial y} \tag{10,b}$$

$$\phi_z = -k\, S_z \frac{\partial T}{\partial z} \tag{10,c}$$

expresiones en las que T es función de punto y tiempo, $T(x,y,z,t)$, y sus derivadas respecto de las variables espaciales son derivadas parciales.

De las ecuaciones (10) pueden obtenerse otras expresiones relativas a las cantidades de calor por unidad de tiempo y de superficie en las direcciones de los ejes. Estas son:

$$\frac{\phi_x}{S_x} = q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (11,a)$$

$$\frac{\phi_y}{S_y} = q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \qquad (11,b)$$

$$\frac{\phi_z}{S_z} = q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z} \qquad (11,c)$$

Interpretando el conjunto de estas ecuaciones escalares como correspondientes a las componentes escalares de un campo vectorial $\vec{q}$, se obtiene la *ecuación del flujo vectorial de calor* o de la *densidad vectorial de flujo de calor*:

$$\vec{q} = q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k} = -k\left[\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\right] \qquad (12)$$

o bien, sintéticamente:

$$\boxed{\vec{q} = -k\, gr\vec{a}d\, T} \qquad (13)$$

expresión general de la ecuación de Fourier en medios isótropos, donde $\vec{q}$ es el flujo vectorial de calor (naturaleza vectorial; cada componente representa la cantidad de calor por unidad de tiempo y de superficie).

3.4. Expresión general en medios anisótropos

La expresión unidireccional de la ecuación de Fourier, (7), puede aplicarse también a las direcciones principales de la conductividad térmica del sólido y, en este caso, se obtendrían las igualdades siguientes:

$$q_x = \frac{\phi_x}{S_x} = -k_x\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (14,a)$$

$$q_y = \frac{\phi_y}{S_y} = -k_y\frac{\partial T}{\partial y} \qquad (14,b)$$

$$q_z = \frac{\phi_z}{S_z} = -k_z \frac{\partial T}{\partial z} \qquad (14,c)$$

de las que, interpretadas conjuntamente como en el caso anterior, puede deducirse la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

que, en notación tensorial, se expresa de cualquiera de las formas siguientes:

$$\boxed{\vec{q} = -K \; gr\vec{a}d \; T} \qquad (16)$$

$$\vec{q} = -K \otimes_c gr\vec{a}d \, T \qquad (17)$$

$$q_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \qquad (18)$$

que constituyen expresiones generales de la ley de Fourier de la conducción del calor.

El caso anterior de medio isótropo es un caso particular del anisótropo para $k_x = k_y = k_z = k$, como se comprueba a continuación. De la aplicación de (15) resulta:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (19)$$

y de éstas

$$\vec{q} = -k \; gr\vec{a}d \; T$$

de manera que esta última "equivale prácticamente" a (19), pero "conceptualmente" existe la diferencia de la naturaleza algebraica tensorial de segundo orden de *K*; en el

caso de medio isótropo la conductividad "puede considerarse como si fuera un escalar" ya que la matriz de (19) es una *matriz escalar*.

Finalmente conviene destacar que actualmente, y al margen de consideraciones de índoles pedagógica e histórica, la ecuación generalizada de Fourier, (17) ó (18) ó (19), se introduce directamente por vía axiomática o como postulado básico de la teoría de la conducción.

4. ECUACIÓN DEL CAMPO TÉRMICO EN RECINTOS SÓLIDOS

4.1. Ecuación de balance energético calorífico

El problema más general relativo a la conducción del calor en sólidos, en el ámbito de la ley de Fourier, consiste en determinar el *campo térmico*, *T(P,t);* es decir, la distribución de temperaturas en el cuerpo (en el espacio, en el recinto sólido) y su evolución en el tiempo.

En el marco de las hipótesis de medio continuo, homogéneo y estable, de densidad ρ y calor específico a presión constante *c*, se recurre al *principio de conservación de la energía* (actualmente uno de los principios generales de conservación de la física, inexistente en 1808) aplicando a un elemento diferencial de volumen la *ecuación de balance energético calorífico*. Sobre el formalismo matemático fourieriano se introducen otras ideas de otras teorías termológicas, primordialmente de la Termodinámica Clásica.

$$\begin{pmatrix} CALOR \\ que\ entra \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} CALOR \\ que\ sale \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} CALOR \\ generado \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cantidad\ de\ CALOR \\ que\ "recibe"\ el\ "cuerpo" \end{pmatrix}$$

referida a un determinado intervalo de tiempo. Si se considera la unidad de tiempo, resulta:

$$\phi_e - \phi_s + \dot{q}\, dV = C\frac{\partial T}{\partial t} = c \cdot m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = c \cdot \rho \cdot dV \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (20)$$

ϕ_e es el flujo de calor (cantidad de calor por unidad de tiempo) que entra por las caras del contorno.

ϕ_s es el flujo de calor que sale por las caras del contorno.

$\phi_e - \phi_s = \phi_c$ es el flujo neto de calor que atraviesa el contorno hacia el interior del recinto.

$\dot{q}$ es el calor generado por unidad de volumen en la unidad de tiempo.

C es la capacidad calorífica del elemento de volumen.

c es el calor específico a presión constante.

ρ es la densidad del material.

4.2. Ecuación del campo térmico en un medio anisótropo

Se utiliza un sistema de referencia principal *(0,x,y,z)* respecto de la conductividad térmica, de modo que el volumen elemental esté orientado según dichas direcciones. Por tanto:

$$K = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \tag{21}$$

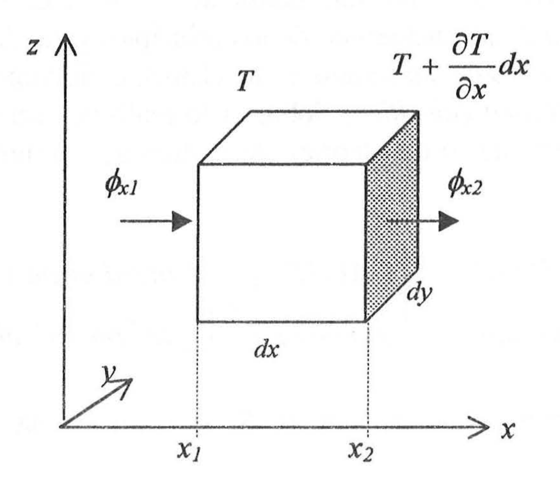


Fig. 2

Si T es el valor del campo térmico en la cara $x = x_1$, perpendicular al eje x, en la cara $x = x_2$ el valor del campo es:

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

El flujo que "entra" por la cara $x = x_1$, según la ley de Fourier, es

$$\phi_{x1} = -\, k_x dy\; dz \frac{\partial T}{\partial x}$$

y el que "sale" por $x = x_2$

$$\phi_{x2} = -\, k_x dy\; dz \frac{\partial}{\partial x}\left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) = -k_x dy\; dz \frac{\partial T}{\partial x} - k_x dy\; dz \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx$$

de modo que el flujo neto que atraviesa las caras perpendiculares al eje "x" hacia el interior es

$$\phi_x = \phi_{x1} - \phi_{x2} = k_x \, dx \, dy \, dz \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{22,a}$$

Análogamente, por analogía cíclica de los ejes, los flujos netos que atraviesan las caras perpendiculares a los ejes "y" y "z" son:

$$\phi_y = k_y \, dx \, dy \, dz \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{22,b}$$

$$\phi_z = k_z \, dx \, dy \, dz \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{22,c}$$

En consecuencia, el flujo total neto que atraviesa el contorno hacia el interior es

$$\phi_c = \phi_x + \phi_y + \phi_z = \left(k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dV \tag{23}$$

Sustituyendo en (20) y dividiendo por dV resulta

$$\boxed{k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dot{q} = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t}} \tag{24}$$

que es la *ecuación general del campo térmico en un recinto sólido homogéneo y estable.*

4.3. Ecuación del campo térmico en un medio isótropo

En el caso $k_x = k_y = k_z = k$, la ecuación (24) se reduce a

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \tag{25}$$

donde

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \Delta T \tag{26}$$

es el laplaciano del campo térmico, y, por tanto, (25) puede escribirse de la forma

$$\boxed{k \, \Delta T + \dot{q} = c \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t}} \tag{27}$$

o bien, dividiendo por k:

$$\Delta T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{c \cdot \rho}{k}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{28}$$

donde $D = \dfrac{k}{c\rho}$ es la *difusividad térmica* del medio, propiedad característica de éste.

4.4 Casos particulares relativos al régimen

A continuación se consideran diferentes condiciones de régimen y se aplican a las ecuaciones correspondientes a medios anisótropos e isótropos, respectivamente.

a) Régimen variable (o transitorio) sin generación interna de calor

$$\dot{q} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1.\ k_x \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = c \cdot \rho \dfrac{\partial T}{\partial t} \\ \\ 2.\ \Delta T = \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial T}{\partial t} \end{cases} \tag{29}$$

La ecuación (29,2) se denomina usualmente *ecuación de la difusión.*

b) Régimen permanente (o estacionario)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1.\ k_x \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q} = 0 \\ \\ 2.\ \Delta T = -\dfrac{\dot{q}}{k} \end{cases} \tag{30}$$

En estas ecuaciones $\dot{q}$ no depende del tiempo (como consecuencia, también, de la hipótesis de régimen permanente). La ecuación (30,2) se denomina de *tipo Poisson.*

c) Régimen permanente sin generación interna de calor

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 1.\ k_x \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \\ \\ 2.\ \Delta T = 0 \end{cases} \tag{31}$$

La ecuación (31,2) se denomina de *tipo Laplace*. Puede observarse que en el caso de medio isótropo sin generación de calor y en régimen permanente el campo térmico es independiente de las propiedades características del medio.

4.5. Notas complementarias

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que se han obtenido en este tema constituyen las ecuaciones que debe satisfacer el campo térmico en determinadas situaciones; son ecuaciones clásicas de la física-matemática que, en general, no pueden resolverse mediante procedimientos analíticos.

Las soluciones matemáticas prácticamente se reducen a los casos que se desarrollan en el capítulo 5, *Ejemplos clásicos con solución analítica*, correspondientes a geometrías (contornos) sencillas con condiciones (valores de T) muy sencillas.

Los casos ordinarios pueden abordarse: a) por métodos de simulación analógica eléctrica (resolución en otro campo físico analógico), y b) por métodos numéricos (aproximados).

5. CONDICIONES DE CONTORNO

La resolución de las ecuaciones del campo térmico exige el conocimiento de las condiciones de contorno del sólido objeto de estudio. Las más usuales son:

5.1. Superficie en contacto con un fluido

Es un proceso de transmisión de calor muy complejo que se engloba en el estudio del *coeficiente de transmisión superficial de calor.* Para el estudio de la trasmisión de calor sólido-fluido y viceversa se utiliza la siguiente figura:

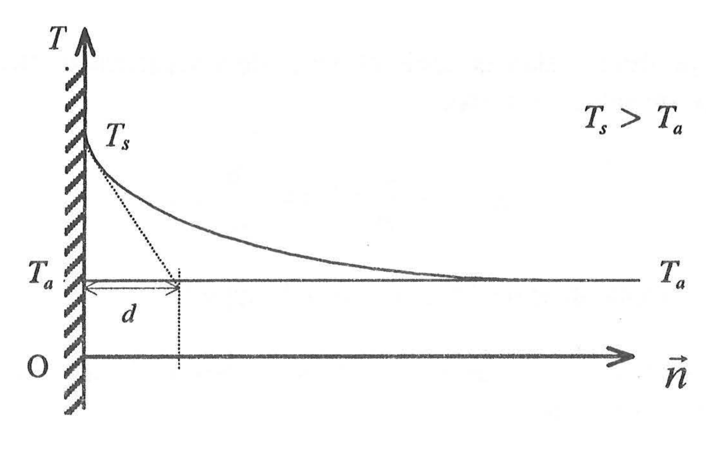


Fig. 3

La figura representa una pared plana, de dimensiones suficientemente grandes como para suponerla infinita y considerar el problema *bidimensional.* Se superponen unos ejes de coordenadas coincidiendo con la superficie de la pared y la dirección del flujo (normal a la pared y "hacia fuera") y se comprueba que a distancias muy pequeñas de la pared, la temperatura es igual a la del fluido.

Se denomina *capa límite convectiva* a la zona del fluido próxima a la pared. En esa zona se aplica la ley de Fourier, llamando d a la distancia a la que corta al eje la tangente a la curva trazada por el punto (O, T_s), en la figura.

$$\phi = k_f S \frac{T_s - T_a}{d} = \frac{k_f}{d} S(T_s - T_a) = h \cdot S(T_s - T_a) \tag{32}$$

El coeficiente h obtenido engloba la influencia de la radiación y se denomina *coeficiente de transmisión superficial* del calor.

5.2. Superficie isoterma

En general son lugares geométricos de puntos de temperatura constante en el *interior* del sólido, superficies que tienen la misma temperatura en todos sus puntos. En este tipo de superficies de $T(P,t) = cte$

Si en una zona del *contorno* se verifica que $T_s = cte$ es una condición de contorno isoterma.

5.3. Superficies adiabáticas

Son superficies aislantes desde el punto de vista térmico. No hay flujo a través de ellas. En caso de sólido isótropo:

$$q_n = -k\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \tag{33}$$

siendo q_n la componente de q según la normal a la superficie.

Las superficies isotermas son perpendiculares a las adiabáticas, y éstas tienen consideración de flujo térmico.

6. EJEMPLOS CLÁSICOS CON SOLUCIÓN ANALÍTICA

6.1. Notas introductorias

Se estudian en este tema los problemas que tienen solución teórica (analítica, matemática) completa; es decir, aquellos para los que puede obtenerse la expresión del campo térmico en el recinto objeto de estudio por medio del análisis matemático.

Estos problemas son muy pocos y requieren, para tener solución, un extenso conjunto de hipótesis simplificativas. Para mejor fijación de las ideas más importantes en la práctica se resuelven con reiteración de las hipótesis en enunciados y desarrollos.

6.2. Problema del muro indefinido

Se considera un muro indefinido de material homogéneo, estable e isótropo en el que se establece un régimen permanente. Se pide:
1º. Describir las hipótesis necesarias para su resolución analítica.
2º. Obtener la expresión del campo térmico.
3º. Obtener la expresión del flujo de calor que atraviesa el muro.

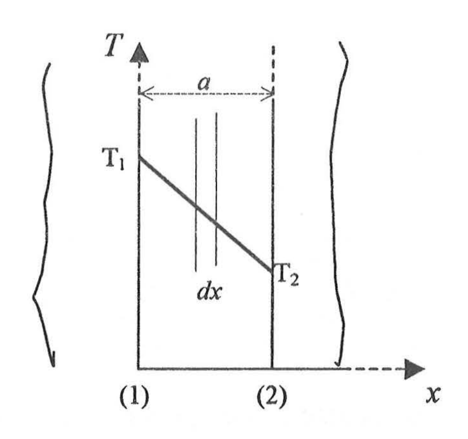


Fig. 5

1º. Hipótesis relativas a:

a) *Medio*: Continuo, caracterizado por propiedades que se describen mediante funciones continuas distribuidas (definidas) en el recinto sólido.

Homogéneo:	$K(\not{P},t,\vec{n})$	
Estable:	$K(P,\not{t},\vec{n})$	k, escalar
Isótropo:	$K(P,t,\not{\vec{n}})$	

b) *Régimen*: permanente

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = cte \\ \\ T_2 = cte \end{array}\right\} \Rightarrow T_1 - T_2 = cte \Rightarrow \text{Causa constante en medio estable} \Rightarrow \text{Efecto cte} \equiv \text{Flujo cte}$$

c) *Geometría*: muro "infinito" (o indefinido) en las direcciones planas perpendiculares a x $\Rightarrow$ Flujo unidireccional.

2°. Campo térmico

$$\phi_x = -k \cdot S \frac{dT}{dx} = cte \Rightarrow \frac{dT}{dx} = C \Rightarrow T = Cx + C' \qquad (34)$$

Se imponen las condiciones de contorno para calcular C y C':

$$\begin{cases} x = 0 ;\ T_1 = C.0 + C' \ \Rightarrow\ C' = T_1 \\ \\ x = a;\ \ T_2 = C \cdot a + C' = C \cdot a + T_1 \ \Rightarrow\ C = \dfrac{T_2 - T_1}{a} \end{cases}$$

Por tanto, el *campo térmico* es

$$\boxed{T = \frac{T_2 - T_1}{a} x + T_1 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{a} x} \qquad (35)$$

3°. Flujo de calor

$$\boxed{\phi_x = -k \cdot S \frac{dT}{dx} = -k \cdot S \frac{T_2 - T_1}{a}} \qquad (36)$$

donde ϕ_x será la cantidad de calor por unidad de tiempo que atraviesa el muro.

Consideraciones complementarias

1. El campo térmico no depende de k (consecuencia de la hipótesis de medio isótropo), depende sólo de la geometría del recinto y de las condiciones de contorno.
2. El flujo térmico es directamente proporcional a k (depende del medio) y del gradiente térmico.

6.3. El calorífugo

Se considera un muro indefinido de material homogéneo, estable e isótropo, situado entre dos fluidos a distinta temperatura, en el que se establece un régimen permanente. Se pide:
1°. Describir las hipótesis necesarias para su resolución analítica
2°. Obtener la expresión del flujo de calor que atraviesa el muro

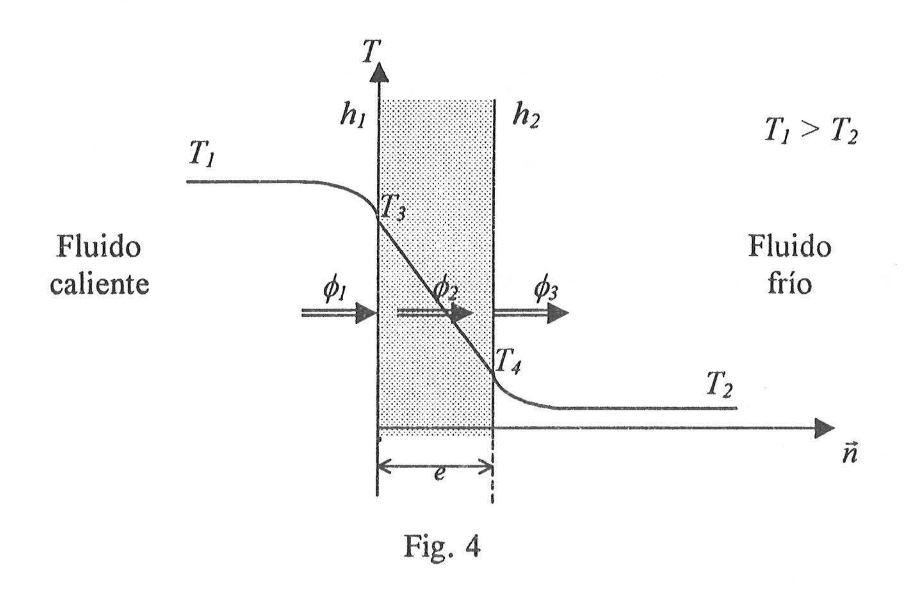


Fig. 4

Hipótesis:

a) *Relativas al material sólido*: Estabilidad, homogeneidad, continuidad e isotropía

b) *Relativas a la geometría*: Pared infinita (flujo unidireccional)

c) *Relativas al régimen:* Régimen permanente

d) *Relativas a las leyes*: Validez de la ley de Fourier en procesos de transmisión de calor en el interior del sólido y a través de sus superficies externas.

El problema consiste en la resolución de una ecuación de Laplace, $\Delta T = 0$, en un recinto con unas condiciones de contorno de isotermas.

Por tratarse de un flujo en régimen estacionario:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi \tag{37}$$

$$\phi_1 = h_1 \cdot S \cdot (T_1 - T_3)$$

$$\phi_2 = k \cdot S \cdot \frac{T_3 - T_4}{e}$$

$$\phi_3 = h_2 \cdot S \cdot (T_4 - T_2)$$

$$\phi = \frac{S \cdot (T_1 - T_3)}{\frac{1}{h_1}} = \frac{S \cdot (T_3 - T_4)}{\frac{e}{k}} = \frac{S \cdot (T_4 - T_2)}{\frac{1}{h_2}} \qquad (38)$$

Por la propiedad de las proporciones de "suma de antecedentes partido por suma de consecuentes igual a una cualquiera de las razones" aplicada a (38):

$$\phi = \frac{S(T_1 - T_3) + S(T_3 - T_4) + S(T_4 - T_2)}{\frac{1}{h_1} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_2}} \qquad (39)$$

Englobando el denominador en una sola constante:

$$\frac{1}{h_1} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{U}$$

o bien,

$$U = \frac{1}{1/h_1 + e/k + 1/h_2}$$

y sustituyendo en (39):

$$\boxed{\phi = U \cdot S(T_1 - T_2)} \qquad (40)$$

donde U representa el *coeficiente global de transmisión del calor del calorífugo.*

Si el muro no fuese homogéneo, sino que estuviese formado por varios materiales de distintos espesores (por ejemplo, 3), la expresión del coeficiente global de transmisión del calor sería de la forma:

$$U = \frac{1}{1/h_1 + e_1/k_1 + e_2/k_2 + e_3/k_3 + 1/h_2}$$

6.4. Problema del cilindro hueco indefinido

Estúdiese, estableciendo previamente las hipótesis que se consideren convenientes, el campo térmico y el flujo de calor en un recinto sólido en forma de corona cilíndrica ("cilindro hueco") de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) y altura l.

Esquema del recinto:

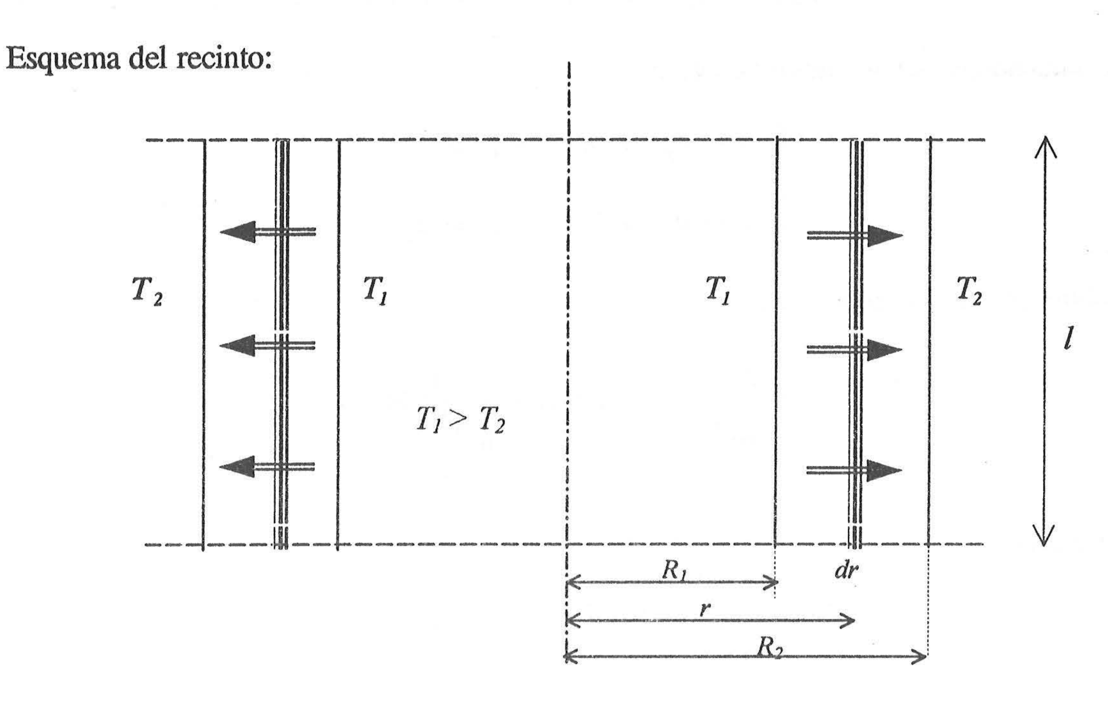


Fig. 6

1°. Hipótesis:

a) relativas al *medio*: continuo, homogéneo, estable e isótropo.

b) relativas al *régimen*: permanente.

$T_1 = Cte$ y $T_2 = Cte$; equipotenciales térmicas (superficies isotermas de contorno).

c) relativas a la *geometría*: problema bidimensional (según planos normales al eje). Simetría axial o cilíndrica. (Se considera un "cilindro hueco" -tubería- de longitud infinita o limitado por dos superficies adiabáticas paralelas entre sí y normales al eje).

Como consecuencia de estas hipótesis el flujo es "radial" plano, perpendicular a las superficies isotermas (las superficies equipotenciales, por simetría axial, son superficies cilíndricas coaxiales).

2°. Campo térmico

$$\phi = -k \cdot S \frac{dT}{dr} = -k \cdot 2\pi r l \frac{dT}{dr} = cte \qquad (41)$$

$$\frac{\phi}{2\pi kl} = r\frac{dT}{dr} = c \Rightarrow c\frac{dr}{r} = dT \qquad (42)$$

ecuación diferencial del campo térmico cuya integración es

$$c\, ln\, r + c_1 = T + c_2 \Rightarrow c\, ln\, r + c' = T \qquad (43)$$

Imponiendo las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} r = R_1 ;\ c\, ln\, R_1 + c' = T_1 \\ r = R_2 ;\ c\, ln\, R_2 + c' = T_2 \end{cases}$$

se obtienen las constantes c y c':

$$c = \frac{T_2 - T_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}; \qquad c' = T_1 - \frac{T_2 - T_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \ln R_1$$

Por tanto:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{ln\frac{R_2}{R_1}}\, ln\, r + T_1 - \frac{T_2 - T_1}{ln\frac{R_2}{R_1}}\, ln\, R_1$$

o bien

$$\boxed{T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{ln\frac{R_2}{R_1}}\, ln\, \frac{r}{R_1}} \qquad (44)$$

3°. Flujo de calor

El flujo ϕ que atraviesa la superficie interior de la corona cilíndrica diferencial -utilizando la ecuación de Fourier y la condición de constante- es:

$$\phi = -k \cdot S\frac{dT}{dr} = cte = -\, k\ 2\pi rl\frac{dT}{dr} \qquad (45)$$

Separando variables e integrando entre los límites correspondientes, teniendo en cuenta el valor de T en la ecuación (44) y derivando respecto r

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T_2 - T_1}{ln\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\phi = -k\,S\frac{dT}{dr} = -k \cdot 2\pi r l\,\frac{T_2 - T_1}{ln\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{r} = +k \cdot 2\pi r l\,\frac{T_1 - T_2}{ln\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{r} \tag{46}$$

$$\boxed{\phi = 2\,\pi\,k\,l\;\frac{T_1 - T_2}{ln\,\frac{R_2}{R_1}}}$$

6.5. Problema de la "esfera hueca"

Estúdiese, estableciendo previamente las hipótesis que se consideren convenientes, el campo térmico y el flujo de calor en un recinto sólido en forma de corona esférica de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$).

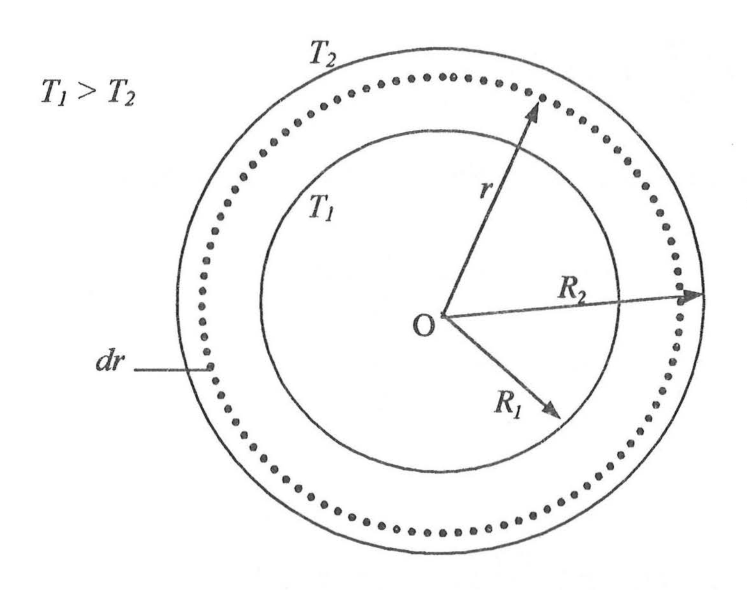


Fig. 7

a) Hipótesis: medio continuo, homogéneo, estable e isótropo; régimen permanente; corona esférica limitada por superficies concéntricas (equipotenciales isotermas) a temperaturas T_1 y T_2. En este marco hipotético se trata de un problema con simetría esférica (o difusión central).

b) Flujo de calor:

$$\phi = -k \cdot 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} = cte \tag{47}$$

Separando variables e integrando entre los límites correspondientes:

$$\phi \frac{dr}{r^2} = -\,4\pi \cdot k \cdot dT$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \phi \, \frac{dr}{r^2} = \int_{T_1}^{T_2} -\,4\pi\, k \cdot dT$$

$$\phi \left(-\frac{1}{r} \right)_{R_1}^{R_2} = \phi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \phi \, \frac{R_2 - R_1}{R_1 \, R_2} = -\,4\pi k \left(T_2 - T_1 \right)$$

$$\boxed{\phi = 4\pi\, k \, \left(T_1 - T_2 \right) \, \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \qquad (48)$$

c) Campo térmico

$$\frac{\phi}{4\pi\, k} = r^2 \, \frac{dT}{dr} = c \quad \Rightarrow \quad dT = c \, \frac{dr}{r^2} \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{c}{r} + c' \qquad (49)$$

Imponiendo las *condiciones de contorno* se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} r = R_1 \quad : \quad T_1 = -\dfrac{c}{R_1} + c' \\[2ex] r = R_2 \quad : \quad T_2 = -\dfrac{c}{R_2} + c' \end{cases}$$

cuya solución es

$$c = \left(T_1 - T_2 \right) \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \quad ; \quad c' = T_1 + \frac{c}{R_1}$$

y, por tanto, la ecuación del campo térmico es:

$$\boxed{T = T_1 - \left(T_1 - T_2 \right) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right)} \qquad (50)$$

NOTAS

NOTAS

CUADERNO

141.02

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

